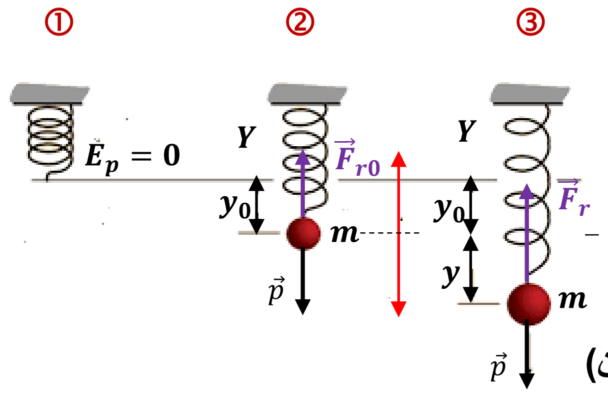
DOC4	الجمل نابض - كتلة Spring – mass systems	وثيقة 4

- الجملة $m-k$ الشاقولية



تشكيل الجملة:

①: النابض في حالة راحة

②: حالة التوازن (بعد تعليق الكتلة في النابض يستطيل بمسافة x_0 (الإستطالة الإبتدائية) ، يصبح النابض متشوه أي ليس في حالة راحة، و بالتالي تصبح الدراسة السكونية (دراسة التوازن) ضرورية.

③: حالة الحركة: نسحب الكتلة m مسافة y نحو الأسفل ثم نتركها تهتز حول وضع التوازن.

الطريقة 1: دراسة الجملة - طريقة المبدأ الأساسي للتحريك.

1. دراسة حالة السكون (التوازن) (الوضعية 2): توازن إنسحابي $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$

$$\vec{F}_{r0} + \vec{p} = \vec{0}$$

بالإسقاط على محور الحركة الشاقولي الموجه نحو الأسفل:

$$F_{r0} - p = 0 \Leftrightarrow mg - ky_0 = 0$$

و منه شرط التوازن:

$$ky_0 = mg \qquad (\text{Eq1})$$

2. دراسة حالة الحركة (الوضعية 3): من الـ م. أ. ت :

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_r + \vec{p} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على محور الحركة الشاقولي الموجه نحو الأسفل:

$$p - F_r = ma$$

$$mg - k(y + y_0) = m\ddot{y} \Rightarrow mg - ky_0 - ky = m\ddot{y}$$

من شرط التوازن (Eq1):

$$-ky = m\ddot{y} \Rightarrow m\ddot{y} + ky = 0 \Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0$$

و هي معادلة تفاضلية من الشكل:

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

حيث: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (أي معادلة هزاز توافقي).

الطريقة 2: دراسة الجملة – طريقة الطاقة (رايلي)(أنظر على الشكل مرجع الطاقة الكامنة الصفري $(E_p = 0)$

- الطاقة الحركية للجملة: $E_C = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$
- الطاقة الكامنة المرونية: $E_{pe} = \frac{1}{2}k(y + y_0)^2$
- الطاقة الكامنة الثقالية: $E_{pp} = -mg(y + y_0)$
- و بالتالي الطاقة الكلية: $E_T = E_C + E_{pe} + E_{pp}$

$$E_T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}k(y + y_0)^2 - mg(y + y_0) = Cte$$

$$\frac{dE_T}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{y}^2+\frac{1}{2}k(y+y_0)^2-mg(y+y_0)\right]=0$$

$$\Rightarrow m\dot{y}\ddot{y}+k(y+y_0)\dot{y}-mg\dot{y}=0$$

$$\Rightarrow \dot{y}[m\ddot{y}+k(y+y_0)-mg]=0$$

وبما أن سرعة الكتلة $\dot{y}$ غير معدومة أثناء الحركة (عدا عند القيم الحدية لتشوه النابض ($y=\mp A$)، و من شرط التوازن (Eq1) نجد إذن: $m\ddot{y}+ky=0$ و منه: $\ddot{y}+\frac{k}{m}y=0$ أي $\ddot{y}+\omega_0^2y=0$ و هي نفس المعادلة التفاضلية المستنتجة بطريقة المبدأ الأساسي للتحريك.

الطريقة 3: دراسة الجملة – طريقة لاغرانج

أ. **حساب دالة لاغرانج Le Lagrangien du Système.**

$$L(\dot{y},y,t)=T-V=E_C-E_p=\frac{1}{2}m\dot{y}^2-\frac{1}{2}k(y+y_0)^2+mg(y+y_0)$$

ب. **معادلة لاغرانج**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=0$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{y})-[-k(y+y_0)+mg]=0\Rightarrow m\ddot{y}+ky+ky_0-mg=0$$

و من شرط التوازن نجد نفس المعادلة المستنتجة بطريقة المبدأ الأساسي للتحريك و طريقة الطاقة $\ddot{y}+\frac{k}{m}y=0$.